

Генерация узкополосного ТГц излучения за счёт столкновения в плазме лазерных кильватерных волн с мелкомасштабной поперечной структурой

Е.П.Волчок, В.В.Анненков, Е.А.Берендеев, И.В.Тимофеев

Рассмотрен новый метод генерации мощного узкополосного терагерцевого излучения в процессе нелинейного взаимодействия встречных лазерных кильватерных волн, профили потенциала в которых модулированы в поперечном направлении и локально не совпадают друг с другом. Показано, что для достижения высокой эффективности излучения на удвоенной плазменной частоте период такой модуляции должен совпадать с длиной генерируемой электромагнитной волны. Каждую из плазменных волн с такой мелкомасштабной поперечной структурой предлагается создавать парой интерферирующих лазерных импульсов, распространяющихся под малым углом друг к другу. Численное моделирование методом частиц в ячейках подтверждает возможность достижения в такой схеме узкой (2%) спектральной линии излучения и высокой эффективности преобразования энергии на уровне 1%. При проектных параметрах XCELS предложенный метод открывает путь к достижению рекордного тераваттного уровня мощности излучения в ТГц диапазоне частот.

Ключевые слова: терагерцевое излучение, плазменные колебания, лазерный импульс, проект XCELS.

1. Введение

Генерация мощных импульсов когерентного терагерцевого (ТГц) излучения актуальна с точки зрения изучения новой физики, связанной с возбуждением различных коллективных степеней свободы в твёрдом теле, а также для ряда химических и биологических исследований, в сфере безопасности и в контексте развития альтернативных методов ускорения электронов [1–3]. Среди множества подходов [4–7], направленных на получение импульсов излучения в ТГц диапазоне частот, особое место занимают плазменные методы. Плазма как нелинейная среда позволяет эффективно конвертировать энергию лазерных импульсов и электронных пучков в энергию электромагнитного излучения на гармониках плазменной частоты $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m_e}$, величина которой определяется концентрацией плазмы n (e и m_e – заряд и масса электрона). Ключевым преимуществом такого подхода является способность плазмы длительно поддерживать колебания со значениями электрических полей, существенно превышающими пороги разрушения вещества, что открывает возможность для генерации интенсивного узкополосного ТГц излучения большой пиковой мощности и энергии. При этом зависимость плазменной частоты от концентрации позволяет осуществлять перестройку частоты излучения в широком диапазоне за счёт изменения плотности рабочего газа.

Одним из методов генерации интенсивных ТГц импульсов с узкой спектральной линией является столкновение встречных кильватерных волн, возбуждаемых в плазме фемтосекундными лазерными импульсами [8]. Нелинейное взаимодействие плазменных волн с несовпадающими поперечными профилями электростатического потенциала приводит к возбуждению электромагнитного излучения на второй гармонике плазменной частоты. Согласно теоретическим оценкам наиболее эффективная генерация излучения происходит в том случае, когда размер фокусных пятен лазерных импульсов в этой схеме сопоставим с длиной волны плазменных колебаний c/ω_p . Численные расчёты методом частиц в ячейках (particle-in-cell, PIC) показали, что эффективность преобразования энергии лазерных импульсов в энергию ТГц излучения при столь сильной фокусировке достигает 0.02%–0.03%. Экспериментальная реализация этой идеи в настоящее время осуществляется на базе Института лазерной физики СО РАН с использованием мультитераваттной лазерной системы (830 нм, 0.2 Дж, более 20 фс) [9, 10].

Для получения узкой спектральной линии излучения необходимо, чтобы нелинейность плазменных волн была малой, что ограничивает интенсивность лазерного импульса, задаваемую через безразмерный вектор-потенциал лазерного поля $a_0 = eA_0/(m_e c^2) < 1$. В итоге, при сохранении оптимального размера фокусного пятна порядка c/ω_p и слабой нелинейности волн данная схема оказывается ограниченной по допустимой суммарной энергии лазерной системы. Использование фокусировки лазерных импульсов в пятно большего размера (десятки или сотни плазменных длин волн) с модулированным поперечным профилем интенсивности на масштабе c/ω_p , как показано в работе [11], позволит использовать в данной схеме лазерные системы более высокой энергии и, следовательно, получить ТГц импульсы с гораздо более высоким энергосодержанием. Одним из способов создания поперечно-модулированной плазменной волны может

Е.П.Волчок, Е.А.Берендеев, И.В.Тимофеев. Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 11; e-mail: timofeev@ngs.ru
В.В.Анненков. Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 11; Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46

служить интерференция пары лазерных импульсов, фокусирующихся в одну точку с небольшим углом между осями их распространения. Благодаря существенному ослаблению дифракционного расплывания более широких лазерных пучков и увеличению длины излучающей области эффективность преобразования энергии в такой схеме может быть увеличена более чем на порядок. Возбуждение встречных плазменных волн с помощью перспективной лазерной системы XCELS откроет путь к генерации импульсов узкополосного ТГц излучения с рекордными значениями мощности и энергии.

2. Теоретическая постановка задачи

Опишем здесь кратко механизм генерации излучения. Рассмотрим однородную плазму, по которой навстречу друг другу по оси z распространяются две потенциальные плазменные волны, возбуждаемые лазерными импульсами (рис.1). Волны могут быть описаны в терминах скалярного электростатического потенциала

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{1}{2} \Phi_1(r_{\perp}) \exp(ikz - i\omega_p t) + \frac{1}{2} \Phi_2(r_{\perp}) \exp(-ikz - i\omega_p t) + \text{с. с.} \quad (1)$$

Взаимное рассеяние одной волны на возмущениях плотности, создаваемых другой волной, приводит к возбуждению нелинейного электрического тока, способного накачивать электромагнитное излучение на удвоенной плазменной частоте. Для идентичных волн, возбуждаемых лазерными импульсами и отличающихся только поперечным профилем потенциала, электрический ток, отвечающий за излучение, может быть выражен в виде

$$J = \frac{1}{4} [\Phi_1 \Delta_{\perp} \Phi_2 - \Phi_2 \Delta_{\perp} \Phi_1], \quad (2)$$

где Δ_{\perp} – поперечная к оси распространения плазменных волн часть оператора Лапласа. Несимметричность поперечных профилей является необходимым условием для отсутствия полной компенсации токов, создаваемых каждой из волн, и для абсолютно симметричных лазерных импульсов может быть реализована с помощью малого прицельного параметра Δ между осями их распространения, как показано на рис.1.

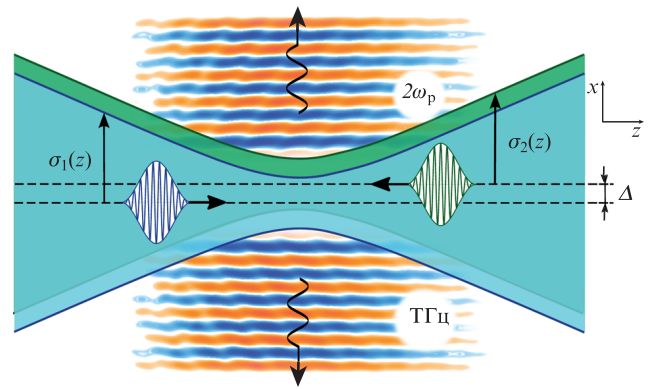


Рис.1. Схематическая постановка задачи. Два встречных лазерных импульса возбуждают пару нелинейно взаимодействующих волн. Несимметричность профилей достигается за счёт введения прицельного параметра Δ относительно оси распространения одного из импульсов. Оба импульса фокусируются в центр системы (сплошным цветом обозначен характерный поперечный размер дифрагирующих гауссовых импульсов: голубой для импульса, идущего слева, зелёный – справа).

Переход к широким поперечно-модулированным плазменным волнам при сохранении невысокого уровня их нелинейности позволит увеличить энергию, которая может быть внесена в систему, и, следовательно, позволит повысить энергию генерируемого излучения. В качестве одного из способов создания таких волн рассмотрим интерференцию пары сонаправленных лазерных импульсов, фокусируемых в одну точку и распространяющихся под малым углом друг к другу (рис.2,а). Долгоживущая плазменная волна возбуждается пондеромоторной силой F_p лазерного импульса, которая выталкивает электроны плазмы из области, занятой волновым пакетом лазерного излучения, и определяется градиентом огибающей импульса. Интерференция лазерных полей приводит к модуляции пондеромоторной силы

$$F_p = -\nabla \left[\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1 a_2}{2} \cos(qx) \right], \quad (3)$$

где $a_{1,2}$ – безразмерный вектор-потенциал поля лазерных импульсов. Следовательно, результирующая плазменная волна будет также обладать неоднородной поперечной структурой

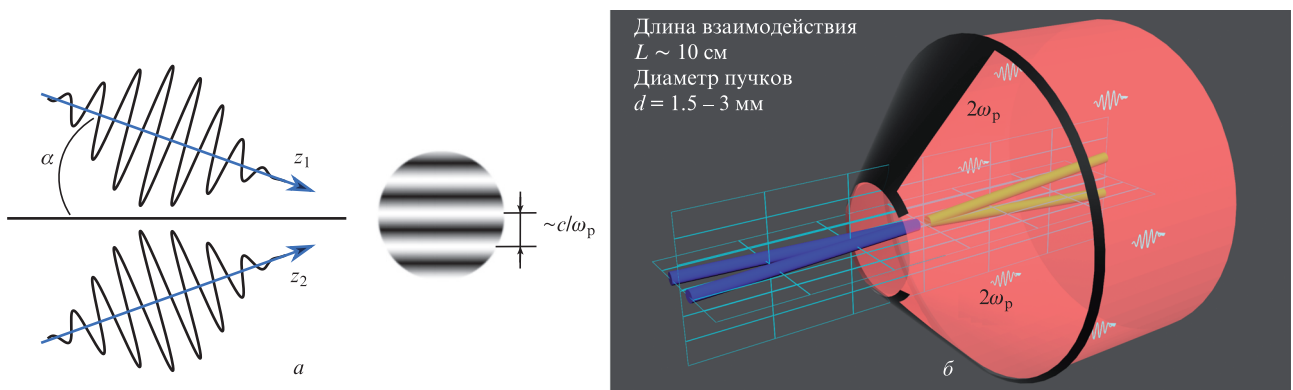


Рис.2. Два сонаправленных лазерных импульса, фокусирующихся в одну точку под небольшим углом 2α по отношению друг к другу, в результате интерференции возбуждают поперечно-модулированную плазменную волну, период модуляции которой определяется величиной α (а); взаимодействие двух таких модулированных волн, каждая из которых создаётся парой лазерных импульсов (показаны синим и жёлтым цветом), приводит к генерации излучения на частоте $2\omega_p$ (б).

$$\Phi(r, t) = \int_0^t dt' \sin(t - t') \times \left[\frac{a_1^2(r, t')}{4} + \frac{a_2^2(r, t')}{4} + \frac{a_1(r, t')a_2(r, t')}{2} \cos(qx) \right] \quad (4)$$

с волновым числом $q = 2\omega_0 \sin \alpha$, зависящим от угла α . Рассмотрим взаимодействие пары таких волн, каждая из которых возбуждается двумя лазерными импульсами (рис.2,б). Считаем, что огибающая каждого из импульсов с центральной частотой ω_0 , длительностью τ и амплитудой a_0 описывается следующим выражением:

$$a_s(r, t) = a_0 \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_s(z_s)}} \exp\left(\frac{-x_s^2}{\sigma_s^2(z_s)}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(t - z_s)}{2\tau}\right), \quad (5)$$

где σ_0 – размер фокусного пятна, а эффекты дифракции учитываются посредством зависимостей $\sigma_s(z_s) = \sigma_0 \times \sqrt{1 + (z_s - z_0)^2/R^2}$ ($R = \omega_0 \sigma_0^2/2$ – длина Рэлея). Все приведённые здесь выражения записаны в безразмерных единицах: потенциалы электрических и магнитных полей выражены в единицах $m_e c^2/e$, пространственные и временные размерности – в c/ω_p и ω_p^{-1} соответственно.

3. Численное моделирование

Проведём численное моделирование описанной выше задачи с помощью метода частиц в ячейках. Для этой цели будем использовать оригинальный релятивистский электромагнитный 2D3V код, в котором плазма описывается набором макрочастиц параболической формы, движущихся под действием электромагнитных полей [12], вычисляемых на сетке [13, 14]. В центральной части области моделирования расположен столб плазмы, по которому распространяются лазерные импульсы. Генерируемое ими излучение покидает плазму в поперечном направлении и поглощается в стенках вычислительной области. Для описания возбуждения модулированной плазменной волны используются два подхода. В первом задаются реалистичные самосоогласованно эволюционирующие лазерные поля с огибающей (5), во втором воздействие лазерного излучения на плазму описывается по-

средством добавления пондеромоторной силы (3) в уравнения движения – модель виртуального лазерного импульса.

В моделировании рассматривались лазерные импульсы с безразмерной амплитудой $a_0 = 0.3$, размер фокусных пятен σ_0 варьировался от $10c/\omega_p$ до $30c/\omega_p$. Размер сетки в случае задания реальных лазеров составлял $\Delta_x = \Delta_z = 0.025c/\omega_p$ с временным шагом $\Delta_t = 0.0125\omega_p^{-1}$. В расчётах с виртуальным лазерным импульсом размер сетки был $\Delta_x = \Delta_z = 0.05c/\omega_p$ и $\Delta_t = 0.025\omega_p^{-1}$. Указанные параметры системы позволяют хорошо разрешать колебания на плазменной частоте и её второй гармонике.

4. Результаты моделирования

На рис.3 приведены результаты численного моделирования возбуждения поперечно-профилированной кильватерной волны парой интерферирующих лазерных импульсов. Для сравнения вычисления проводились с помощью двух подходов: с использованием реальных лазерных импульсов и с добавлением пондеромоторной силы. Как видно из рис.3,б, оба подхода достоверно, в хорошем согласии с теоретической зависимостью (4) с учётом (5), воспроизводят поперечный профиль плазменной волны. Таким образом, моделирование показывает, что использование пары сонаправленных лазерных импульсов, сфокусированных в одну точку под небольшим углом по отношению друг к другу, действительно позволяет возбуждать долгоживущую (сотни ω_p^{-1}) плазменную кильватерную волну с модулированным поперечным профилем, амплитуда и период модуляции которого совпадают с предсказаниями линейной теории. Несмотря на некоторое превышение пороговой мощности при выбранных параметрах, релятивистская самофокусировка не оказывает заметного влияния на форму и характеристики кильватерной волны, что подтверждается результатами численного моделирования с самосоогласованно эволюционирующими лазерными импульсами (рис.3). Является ли это следствием двумерного характера расчётов, предстоит выяснить в будущем. В дальнейшем для моделирования гораздо более протяжённых пространственных масштабов, включающих в себя значительную часть области генерации излучения, была использована

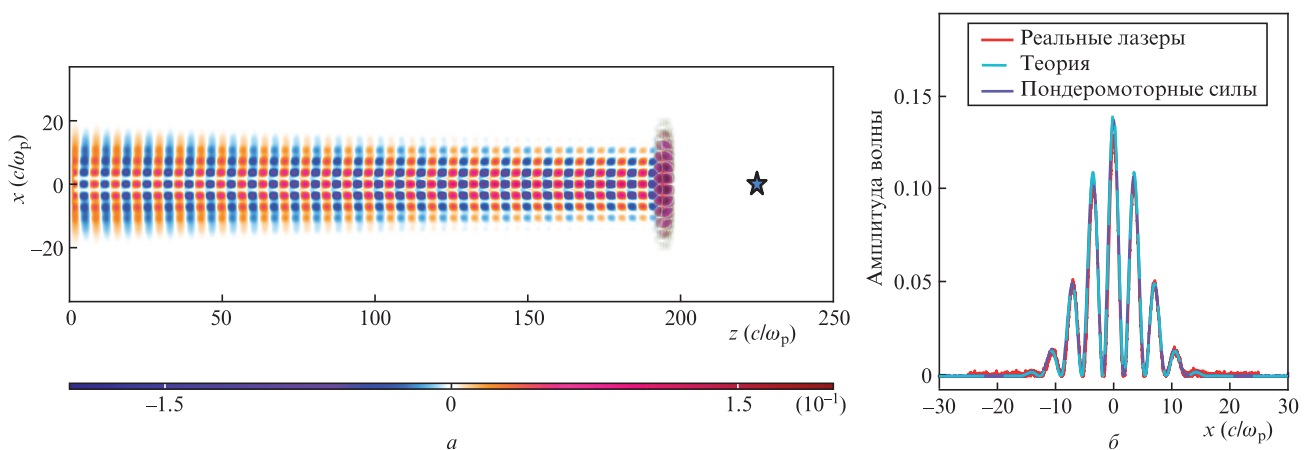


Рис.3. Результаты численного моделирования возбуждения модулированной кильватерной волны в плазме: карта продольных полей E_z в момент времени $187.5\omega_p^{-1}$, волна возбуждается реальными лазерными полями (точка фокусировки лазерных импульсов обозначена синей звездой) (а); сравнение поперечных профилей волны вблизи фокуса в теории (голубая пунктирная кривая), при моделировании реальных лазерных полей (красная кривая) и при использовании виртуального лазерного импульса (фиолетовая кривая) (б).

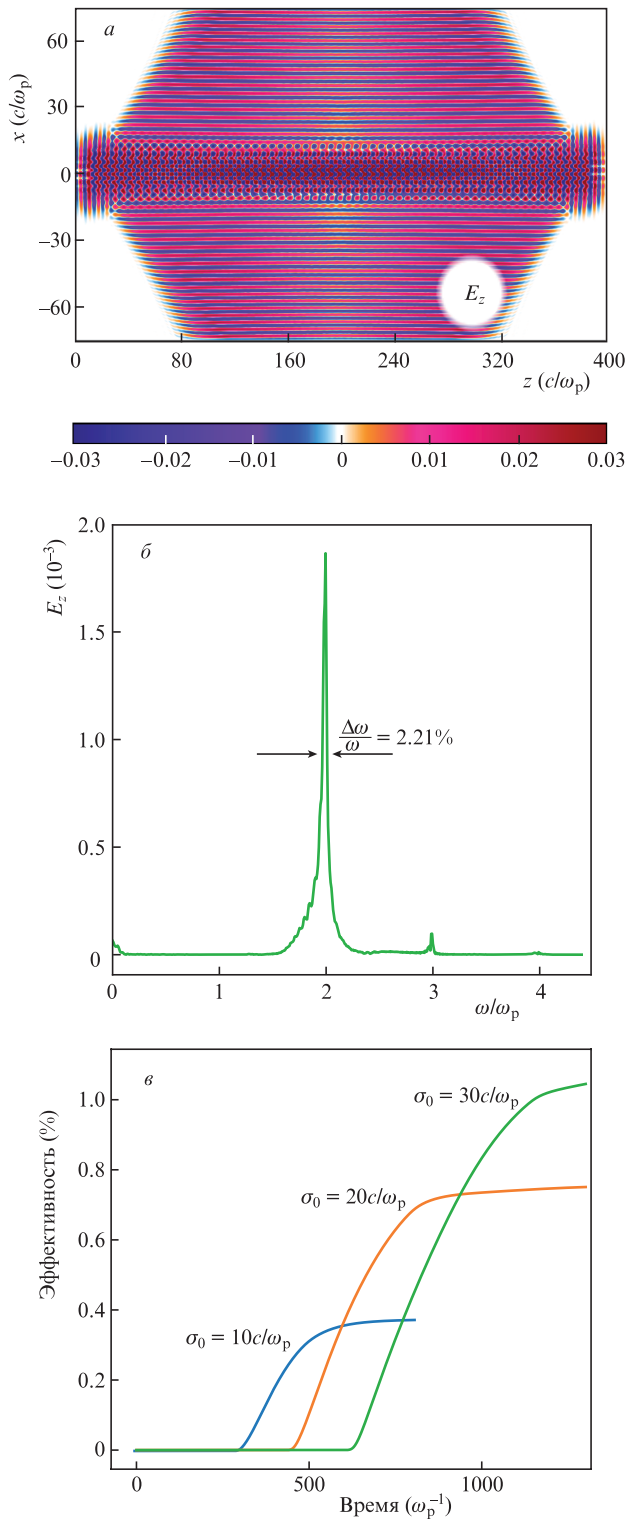


Рис.4. Результаты численного моделирования генерации излучения встречными поперечно-модулированными кильватерными волнами в плазме: карта продольных полей E_z при $\sigma_0 = 10c/\omega_p$ (распространяющиеся навстречу друг другу лазерные импульсы фокусируются в центр системы) (а); фурье-спектр излучения для случая, показанного на рис.4,а, измеренный в центре системы у границы поглощающего слоя (б); эффективность преобразования энергии лазерных импульсов в энергию излучения для разной величины фокусных пятен $\sigma_0 = 10, 20$ и $30c/\omega_p$ в зависимости от времени (в).

более экономичная модель виртуального лазерного импульса.

Рассмотрим генерацию электромагнитного излучения на частоте $2\omega_p$ встречными поперечно-модулированными кильватерными волнами в плазме. На рис.4 для примера приведены результаты моделирования в случае $\sigma_0 = 10c/\omega_p$. При столкновении плазменных волн наблюдается интенсивное когерентное излучение из области перекрытия дифрагирующих лазерных импульсов. Генерация происходит на второй гармонике плазменной частоты, что подтверждается фурье-спектром (см. рис.4,б), ширина спектральной линии излучения составляет всего $\sim 2\%$. Наблюдается также слабый пик в окрестности третьей гармоники ω_p , связанный с последующими нелинейными процессами распада – слияния исходной волны и неизлучающих гармоник, но вклад этих процессов мал. Излучение происходит в поперечном направлении, как и предсказывалось в теории.

Рассмотрим, как меняется эффективность генерации излучения η , определяемая как отношение энергии излучения на частоте $2\omega_p$ к суммарной энергии лазерных импульсов

$$E_{\text{las}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0^2 \omega_0^2 \tau \sigma_0, \quad (6)$$

с увеличением размера фокусного пятна. Из рис.4,в видно, что максимальная эффективность излучения растёт линейно с ростом σ_0 , а значит, и с ростом суммарной энергии (6), вносимой в систему лазерными импульсами. В приведённых расчётах ширина пучков в фокусе изменялась от $10c/\omega_p$ до $30c/\omega_p$. Эффективность конверсии энергии при этом увеличилась примерно с 0.35% до 1%. Отметим также, что по сравнению с оригинальной схемой, где сталкивающиеся гауссовы пучки фокусировались в пятна малого размера $\sim c/\omega_p$, эффективность генерации излучения выросла более чем в 30 раз.

5. Обсуждение результатов

Увеличение эффективности генерации излучения с увеличением ширины лазерных пучков происходит вследствие того, что широкие пучки слабо подвержены дифракции, поэтому длина области эффективного взаимодействия кильватерных волн оказывается существенно больше, чем для узких ($\sigma_0 \sim c/\omega_p$) лазерных пучков, и линейно растёт с ростом размера фокусного пятна σ_0 . Такой рост действительно наблюдается в модели виртуального лазера, однако в реальности он не может происходить безгранично, поскольку при достаточно больших длинах необходимо учитывать истощение энергии лазерного драйвера. Оправданием достоверности наблюдаемой в моделировании тенденции $\eta \propto \sigma_0$ и реалистичности достижения в предложенной схеме эффективности генерации излучения на уровне 1% служит тот факт, что во всех обсуждаемых здесь случаях энергосодержание плазменных волн не превышало десятой доли лазерной энергии (6).

Экспериментальная реализация этого механизма подразумевает инжекцию лазерного излучения в однородный газ, в качестве которого можно использовать гелий. Влияние эффектов неоднородности, которые естественно возникают при ионизации газа на периферии плазменного канала, изучалось для схожих условий в работе [10]. Было показано, что такие эффекты не оказывают существенного влияния на параметры кильватерной волны в

области электромагнитной эмиссии. Излучение на второй гармонике плазменной частоты может беспрепятственно покидать плазму, не испытывая её экранирующего действия, поэтому наличие окружающей плазмы не влияет на выход излучения. Однако для эффективного возбуждения плазменной кильватерной волны с мелко-масштабной модуляцией профиля вопрос однородности газа и последующей плазмы весьма важен. Для реализации обсуждаемого механизма требуется создать область однородного газа длиной ~ 10 см и радиусом 1 мм, что может быть сделано в газовой ячейке с предварительно напущенным газом. Излучение лазерной системы необходимо разбить на четыре канала и попарно сфокусировать в центр газовой ячейки под углом $\alpha = \arcsin(\sqrt{3} \omega_p/2\omega_0)$ к оси системы (рис.2,б). Этот угол определяется равенством периода модуляции профиля кильватерной волны и длины волны генерируемого излучения. При фиксированном ω_0 оптимальный угол сведения и допустимое отклонение от этого значения ($\sim 10\% - 14\%$) увеличивается с ростом плотности и, соответственно, частоты излучения (рис.5). Для предотвращения возврата лазерного излучения в систему усиления каждую пару лазерных пучков можно сводить во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поскольку частота излучения $2\omega_p$ определяется концентрацией плазмы, $\propto \sqrt{n}$, меняя плотность газа, можно покрыть практически весь терагерцевый спектр, подстраивая при этом длительность лазерных импульсов и угол их сведения. Возбуждение кильватерной волны происходит наиболее эффективно в том случае, когда размер волнового пакета лазерного импульса равен примерно половине длины плазменной волны, т.е. $\tau \sim \pi/\omega_p$. Таким образом, для лазерного импульса определённой длительности существует оптимальное значение концентрации. К примеру, для генерации излучения в диапазоне 5 – 30 ТГц длительность лазерных импульсов, определяемая на полувысоте профиля интенсивности, должна меняться в диапазоне $\tau_{FWHM} = 140 - 25$ фс. Поскольку эффективность возбуждения кильватерной волны также зависит от отношения ω_p/ω_0 , эффективность излучения выше при большей концентрации плазмы и большей длине волны лазерного излучения [8].

Стоит также отметить, что данный механизм позволяет генерировать как узкополосное излучение ($\sim 2\%$) при сохранении невысокого уровня нелинейности, так и ши-

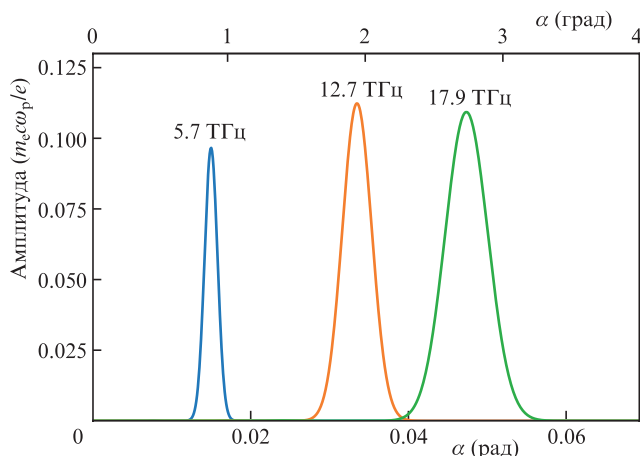


Рис.5. Зависимость максимальной амплитуды излучения от угла попарного сведения лазерных импульсов $\sigma_0 = 30c/\omega_p$ и $a_0 = 0.3$ для разной концентрации плазмы: $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (частота излучения 5.7 ТГц), $n = 5 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (12.7 ТГц) и $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (17.9 ТГц).

рокополосное, $\Delta\omega/\omega \sim 1$, при достижении $a_0 \sim 1$. Ширина спектра излучения определяется временем жизни кильватерной волны. Более высокая пиковая мощность может быть достигнута для волн с более высоким уровнем нелинейности, однако время жизни таких волн будет снижаться с ростом их амплитуды, приводя к значительному уширению спектральной линии излучения. Узкополосное терагерцевое излучение с большой амплитудой электрического поля является более сложным для генерации другими методами, поэтому данный механизм предлагается использовать в первую очередь для этой задачи. В этом случае допустимая интенсивность лазерного излучения ограничена требованием на низкий уровень нелинейности кильватерной волны, $a_0 < 1$. Тем не менее даже в этом случае амплитуда электрического поля может достигать десятков ГВ/см.

Оценим параметры ТГц излучения, которые можно получить, используя в качестве драйверов плазменных волн четыре пучка лазерной системы XCELS [15] с суммарной энергией 1.5 кДж. Для генерации излучения в плазме с концентрацией 10^{17} см^{-3} оптимальная длительность пучков, вычисленная на полувысоте профиля интенсивности, должна составлять 140 фс. Центральная частота генерируемого излучения при такой концентрации плазмы – 5.7 ТГц. Для получения ТГц импульса с узкой спектральной линией (с шириной частотного спектра на уровне 2%) диаметр фокусного пятна каждого лазерного пучка, определяемый на полувысоте профиля интенсивности, должен быть равен 1.4 мм. Оптимальный угол между осями лазерных пучков при этом составляет $\sim 1^\circ$. Энергия в импульсе излучения при эффективности конверсии $\sim 1\%$ будет достигать 15 Дж при длительности 3 – 5 пс. Как показано на рис.2,б, радиально расходящееся излучение с помощью конического зеркала может быть трансформировано в поток, который затем распространяется вдоль оси системы и может быть эффективно сфокусирован для получения высоких напряженностей электрического поля.

6. Заключение

Рассмотрен новый метод генерации излучения в терагерцевом диапазоне частот при взаимодействии встречных плазменных кильватерных волн, каждая из которых создаётся парой интерферирующих лазерных импульсов и имеет мелкомасштабную поперечную структуру. Ключевыми свойствами данной схемы является возможность получения ТГц импульсов с узкой спектральной линией и её масштабируемость на самые мощные в мире лазерные системы. С помощью PIC-моделирования показана возможность достижения в такой схеме высокой эффективности преобразования лазерной энергии в энергию ТГц излучения (на уровне 1%). Успешная реализация предложенной схемы на XCELS обещает существенно превысить рекордные параметры узкополосных ТГц импульсов, получаемых с помощью лазеров на свободных электронах, и открывает путь к генерации ТГц излучения тераваттного уровня мощности.

Численное моделирование было выполнено с использованием вычислительных ресурсов Иркутского суперкомпьютерного центра СО РАН [16] и Центра научных ИТ-сервисов ФИЦ ИВТ СО РАН [17]. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

1. Kampfrath T., Tanaka K., Nelson K.A. *Nat. Photonics*, **7**, 680 (2013).
2. Dhillon S., Vitiello M., Linfield E., Davies A., Hoffmann M.C., Booske J., Paoloni C., Gensch M., Weightman P., Williams G., et al. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **50**, 043001 (2017).
3. Zhang D., Fallahi A., Hemmer M., Wu X., Fakhari M., Hua Y., Cankaya H., Calendron A.-L., Zapata L.E., Matlis N.H., et al. *Nat. Photonics*, **12**, 336 (2018).
4. Fülöp J.A., Tzortzakis S., Kampfrath T. *Adv. Opt. Mater.*, **8**, 1 (2020).
5. Hafez H., Chai X., Ibrahim A., Mondal S., Férachou D., Ropagnol X., Ozaki T. *J. Opt.*, **18**, 093004 (2016).
6. Tan Z.Y., Wan W.J., Cao J.C. *Chin. Phys. B*, **29**, 84212 (2020).
7. Carr G.L., Martin M.C., McKinney W.R., Jordan K., Neil G.R., Williams G.P. *Nature*, **420**, 153 (2002).
8. Timofeev I., Annenkov V., Volchok E. *Phys. Plasmas*, **24**, 103106 (2017).
9. Timofeev I., Berendeev E., Annenkov V., Volchok E. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, **62**, 045017 (2020).
10. Timofeev I., Berendeev E., Annenkov V., Volchok E., Trunov V. *Phys. Plasmas*, **28**, 013103 (2021).
11. Berendeev E., Timofeev I., Volchok E., Annenkov V. *J. Phys. Conf. Ser.*, **2028**, 012008 (2021).
12. Boris J.P. *Proc. Fourth Conf. Num. Sim. Plasmas* (Washington, 1970, pp 3 – 67).
13. Yee K. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **14**, 302 (1966).
14. Esirkepov T.Z. *Comput. Phys. Commun.*, **135**, 144 (2001).
15. <https://xcels.ipfran.ru/img/site-XCELS.pdf>.
16. <https://hpc.icc.ru/>.
17. <https://sits.ict.sc/>.